

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2010

Proba E c)

Probă scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

• Všetky úlohy (I, II, III) sú povinné. Udeľuje sa 10 bodov z úradu.

• Čas na riešenie úloh je 3 hodiny.

• Pre všetky úlohy zapíšte úplné riešenia.

ÚLOHA I

(30 bodov)

- 5b 1. Vypočítajte $\left((1-i)(i-1)\right)^4$.
- 5b 2. Dokážte, že funkcia $f: (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$ je nepárna.
- 5b 3. Určte celé čísla, ktoré sú riešením nerovnice $x^2 + 2x - 8 < 0$.
- 5b 4. Koľko prvkov z množiny $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ sú deliteľné číslom 4 alebo číslom 5?
- 5b 5. V sústave súradnicových osí xOy zvolíme body $M(1, -2)$, $N(-3, -1)$ a $P(-1, 2)$. Určte súradnice bodu Q tak, aby $MNPQ$ bol rovnobežník.
- 5b 6. V trojuholníku ABC , $AB = 6$, $AC = 3$ a $BC = 5$. Vypočítajte veľkosť výšky $[AD]$.

ÚLOHA II

(30 bodov)

1. Daná je sústava
$$\begin{cases} x - 2y - 8z = -65 \\ 3x + y - 3z = 22 \\ x + y + z = 28 \end{cases}$$
, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ a matica asociovaná sústave $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5b a) Dokážte, že hodnota matice A je 2.
- 5b b) Vyriešte sústavu v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 5b c) Určte počet riešení sústavy v množine $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Daná je množina matíc $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.
- 5b a) Určte počet prvkov množiny A .
- 5b b) Dokážte, že existuje matica rôzna od nuly $M \in A$ tak, aby $\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.
- 5b c) Vyriešte v množine A rovnicu $X^2 = I_2$.

ÚLOHA III

(30 bodov)

1. Daná je funkcia $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$.
- 5b a) Určte rovnicu asymptoty grafu funkcie f , do $+\infty$.
- 5b b) Preskúmajte monotónnosť funkcie f .
- 5b c) Určte inflexné body funkcie f .
2. Daná je postupnosť $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x} dx$.
- 5b a) Dokážte, že postupnosť $(I_n)_{n \geq 1}$ je rýdzo rastúca.
- 5b b) Dokážte, že postupnosť $(I_n)_{n \geq 1}$ je ohraničená.
- 5b c) Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(2 - I_n)$.